

# **Pk4: Moderne Physik Experimentalphysik IV**

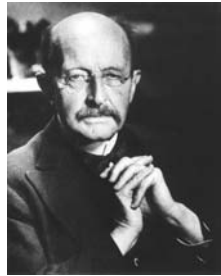
**Atome und Moleküle,  
Kerne und Teilchen,  
Phänomene der Quantenphysik**

Sommersemester 2011

Oliver Benson

# 1.1. Quanteneffekte mit Licht

## 1.1.1. Geschichtliches:

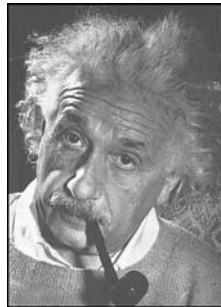


1900: Planck'sches Strahlungsgesetz

1905: Einsteins Quantenhypothese für den Photoeffekt

1913: Bohrsches Atommodell

1924: Louis de Broglie: Materiewellen

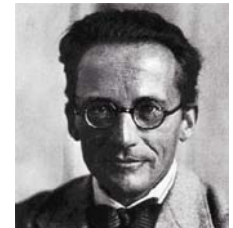
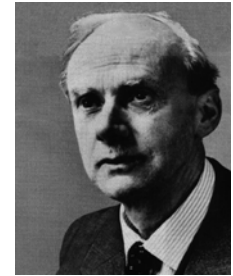


1925: Formulierung des Pauli-Prinzips

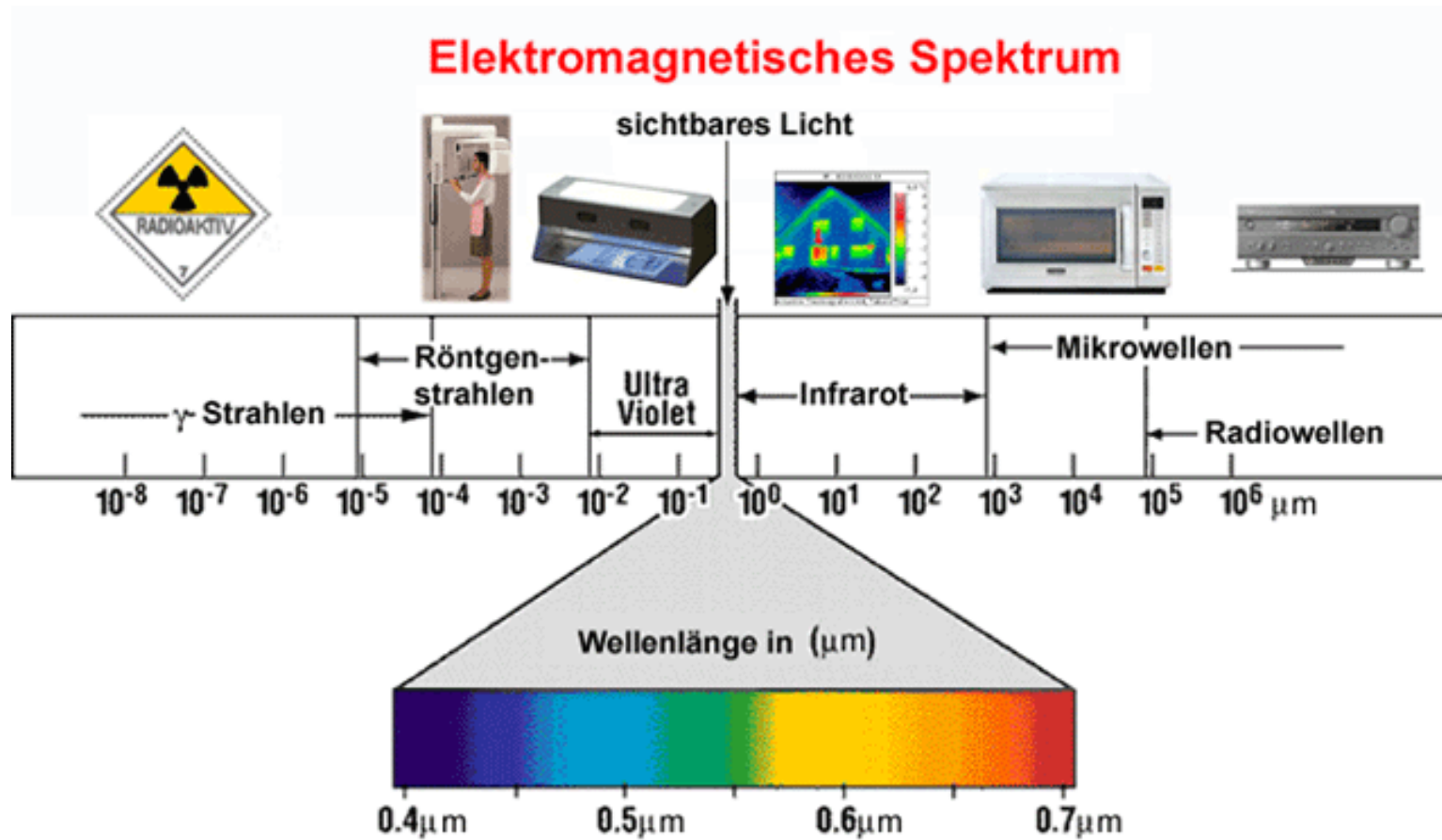
1925/26: Matrizenmechanik Heisenberg, Born

1926: Schrödinger-Gleichung

1928: Dirac-Gleichung



# Das elektromagnetische Spektrum

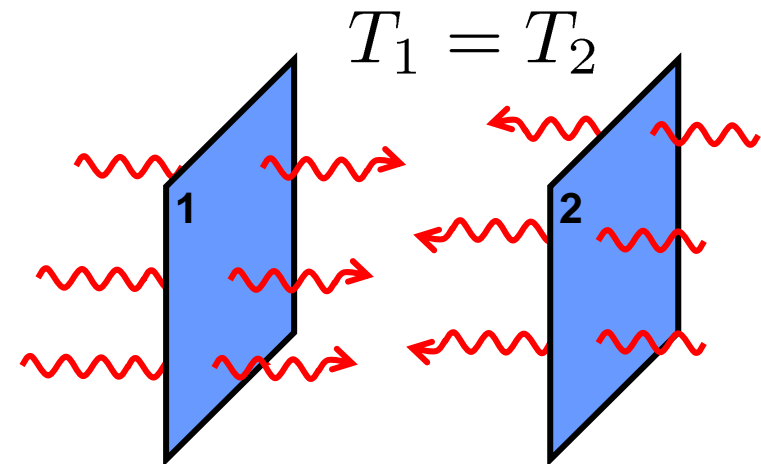


## 1.1.2. Der Schwarze Strahler

Man betrachte zwei strahlende Platten mit Absorptions(Emissions)koeffizient  $a_{1,2}$  ( $e_{1,2}$ ) im thermodynamischen Gleichgewicht:

$$a_{1,2} + e_{1,2} = 1$$

$$a_2(\lambda)P_1(\lambda) = a_1(\lambda)P_2(\lambda)$$



Leistungsaufnahme von (2) aus dem Feld von (1) = Leistungsaufn. von (1) aus dem Feld von (2)

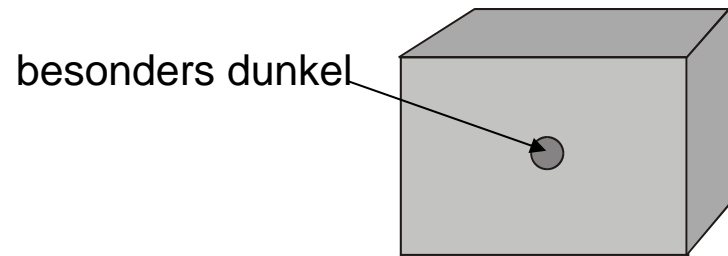
$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= a_1(\lambda)P_2(\lambda)/a_2(\lambda) \\ &= a_1(\lambda)P_S(\lambda) \end{aligned}$$

Kirchhoff'sches  
Strahlungsgesetz

Ein schwarzer Strahler hat ein Absorptionsvermögen von 1.

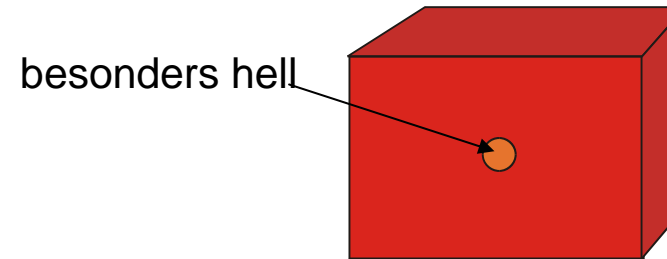
Die Strahlungsleistung ist bei einem Schwarzen Strahler maximal!

Realisierung von schwarzen Strahlern z.B. durch vollständig geschwärzte Metallkästen mit einem Loch (deshalb auch Hohlraumstrahlung):



besonders dunkel

geringe Temperatur



besonders hell

hohe Temperatur

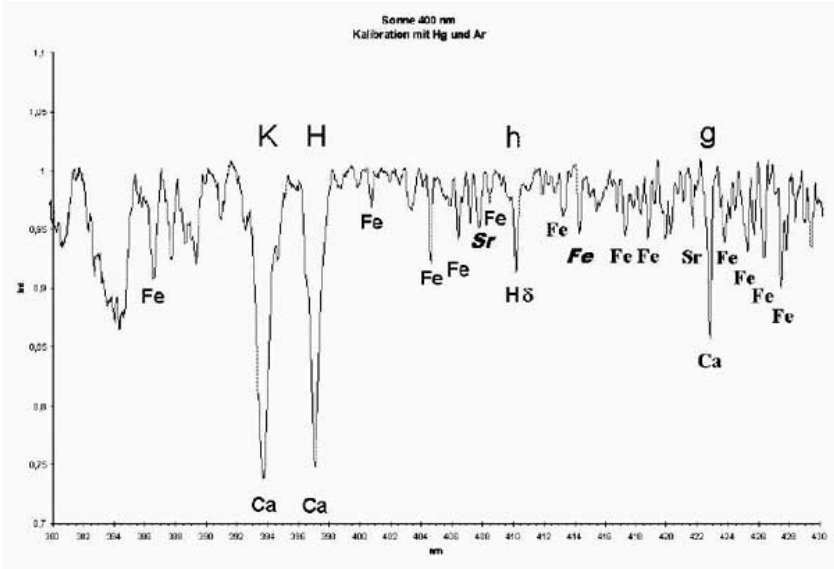
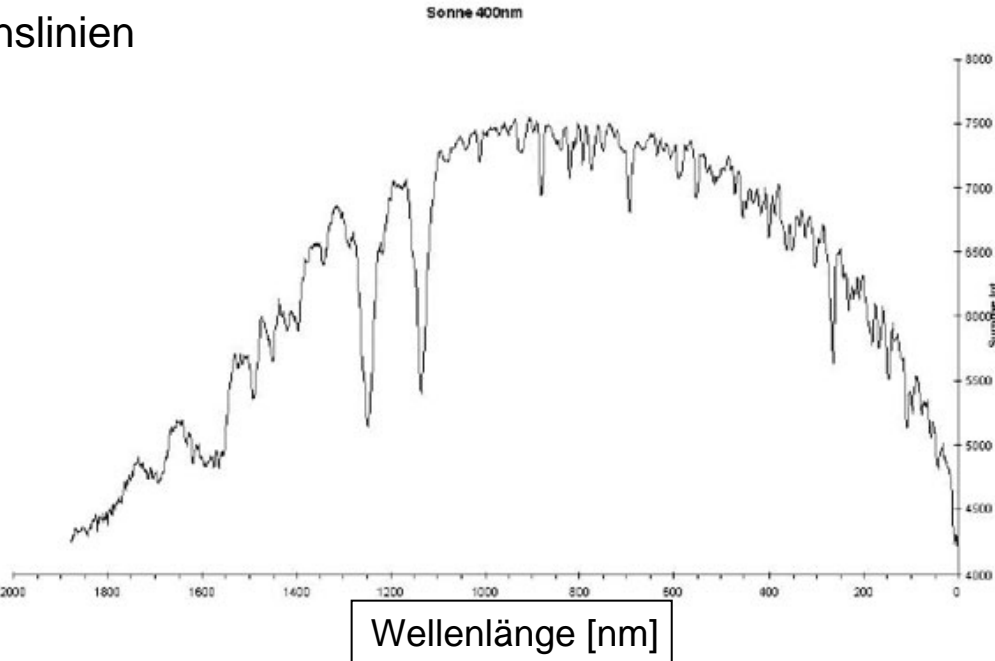
Einfache fundamentale Frage: Wie sieht die spektrale Energiedichte für einen Schwarzen Strahler aus (Energiedichte der Hohlraumstrahlung)?

➡ relativ einfach zu messen:

(z.B. Sonne als schwarzer Strahler mit einer Temperatur von 5800 K)

Man kann verschiedene Vorüberlegungen anstellen, wie  $w_E(\omega)$  aussehen muss. Aus der Thermodynamik folgt z.B., dass die Strahlung isotrop und homogen sein muss.

Teil des Sonnenspektrums:  
 Die Einrücke sind Absorptionslinien  
 durch spezifische atomare  
 Übergänge in Bestandteilen  
 der Sonnenmaterie.



### 1.1.3. Die Plancksche Strahlungsformel s. auch R. Loudon, „The Quantum Theory of Light“

Um 1900 waren die folgenden Gesetze/Zusammenhänge bekannt, teils aus experimentellem Befund, teils aus thermodynamischen Erwägungen:

1) Wien'sches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,8978 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

2) Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\int w_{E,\lambda} c d\lambda = \sigma T^4 \quad \text{mit} \quad \sigma = 5.6703^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \text{K}^{-4}$$

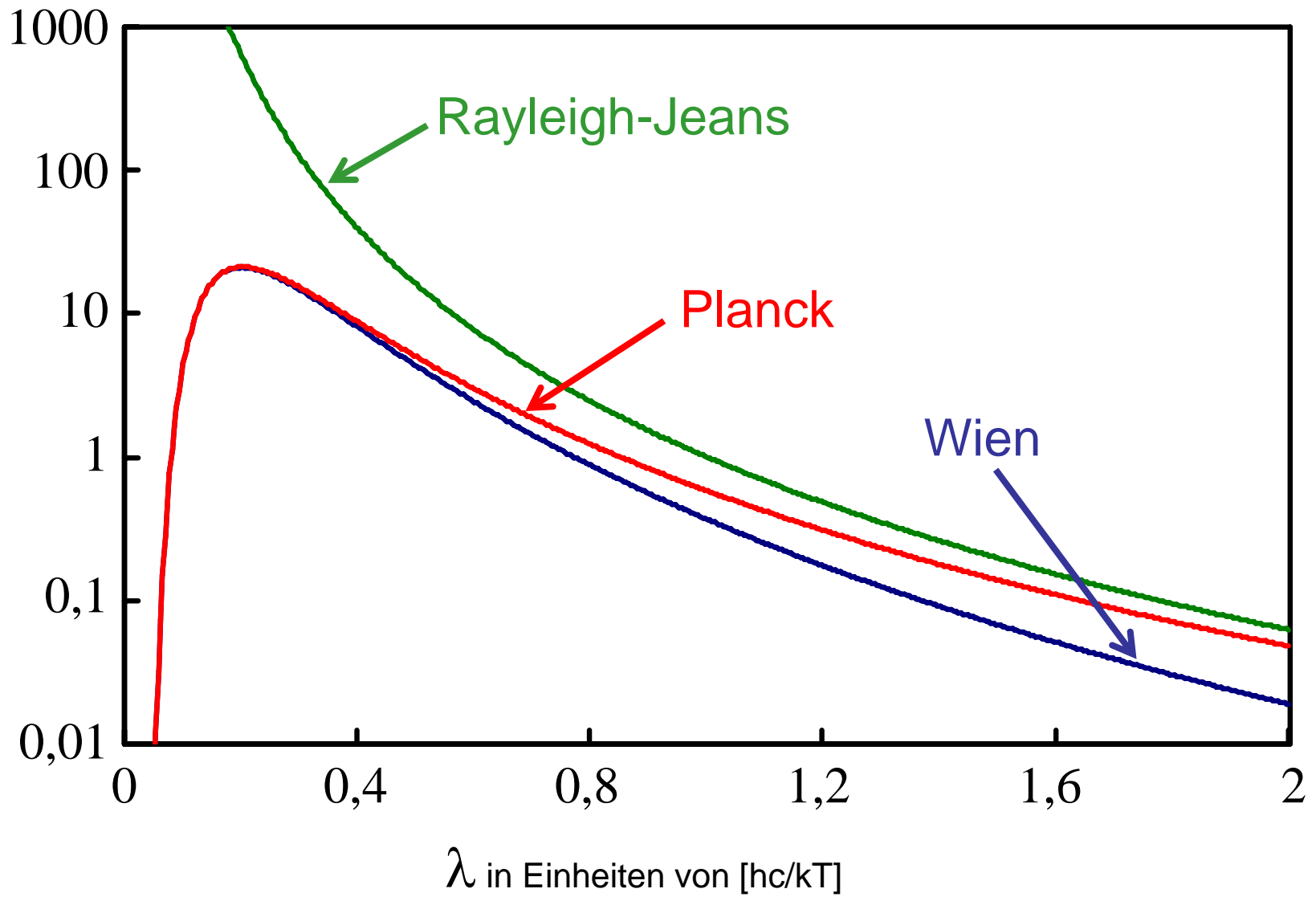
$w_{E,\lambda} d\lambda$  Energiedichte

1) Gesetz von Rayleigh-Jeans:

$$w_{E,\omega}^{R.J.} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T = \frac{k_B T}{\pi^2 c \lambda^2}$$

$w_{E,\omega} d\omega$  Energiedichte

$w_{E,\lambda}$  in Einheiten von  $[2(kT)^5/(h^4c^3)]$





**Problem:** Das Gesetz von Rayleigh-Jeans ist nur eine Approximation für kleine Frequenzen (grosse Wellenlängen) und der Ausdruck für die gesamte Energiedichte divergiert.

Letzteres bezeichnet man auch als die UV-Katastrophe

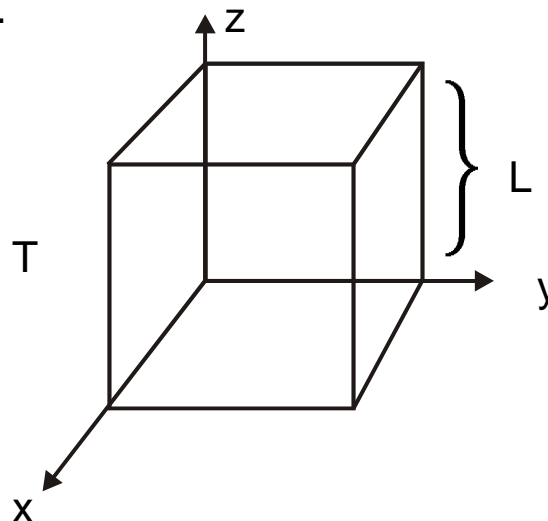
UV-Katastrophe beim Gesetz von Rayleigh-Jeans:

$$\int_0^{\infty} w_{E,\omega}^{R.J.} d\omega \rightarrow \infty$$



## Modendichte des elektromagnetischen Feldes

Planck ging von einem würfelförmigen Hohlraum aus. Das Strahlungsfeld im Inneren des Würfels befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht mit den leitenden Wänden des Würfels bei einer Temperatur  $T$ .



Plancks Annahme: Jede Mode des Feldes ist mit einem harmonischen Oszillator in den Wänden im thermodynamischen Gleichgewicht. Jeder Oszillator kann nur diskrete Energien annehmen:

$$E_n = n\hbar\omega = nh\nu$$

mit  $\hbar = h/(2\pi)$

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

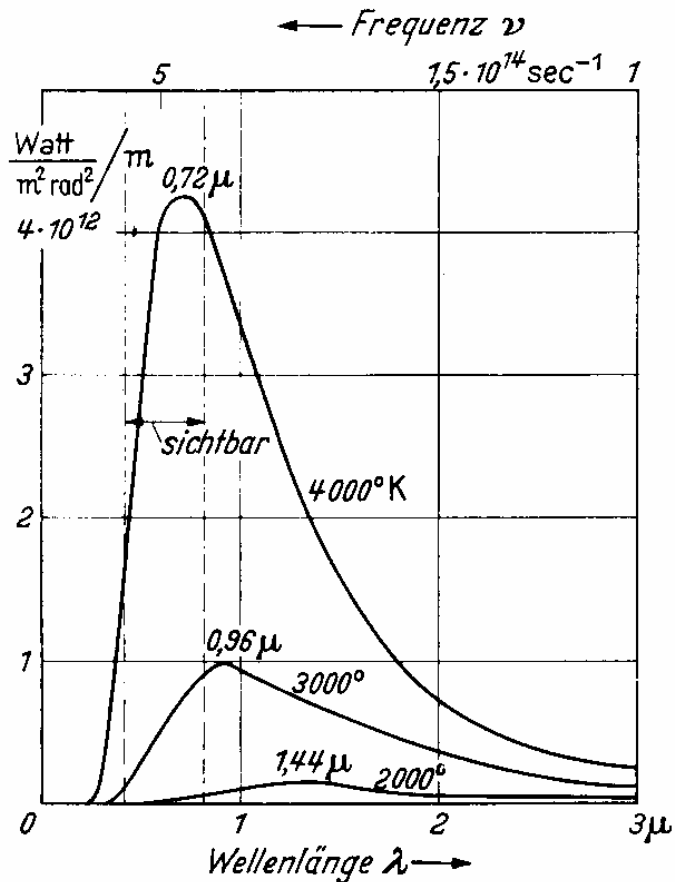
Planck'sches Wirkungsquantum

$h$  hat die Dimension einer Wirkung oder eines Drehimpulses (Kraft x Weg x Zeit)

$$[h] = N \cdot m \cdot s$$

Es ergibt sich für die spektrale Energiedichte die Planck'sche Strahlungsformel:

$$w_{E,\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$



Spektrum des schwarzen Strahlers für verschiedene Temperaturen

Bemerkung: Das Wirkungsquantum  $h$  ist eine sehr kleine Grösse!

Zahlenbeispiel: Eine Lichtquelle (Glühbirne) von 100 W (typische Effizienz von 1%) emittiert bei einer mittleren Wellenlänge von ungefähr 500 nm

$$0,01 \cdot \frac{100 \cdot 500 \times 10^{-9}}{6,6 \times 10^{-34} \cdot 3 \times 10^8} = 3 \times 10^{18}$$

Photonen pro Sekunde!



Aus der Planck'schen Strahlungsformel lassen sich durch Näherung der Exponentialfunktion (für kleine oder grosse T) approximative Formeln finden:

$$1) \quad \hbar\omega \ll k_B T \qquad w_{E,\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T$$

Klassischer Grenzfall:  $\hbar \rightarrow 0$     Rayleigh-Jeans

$$2) \quad \hbar\omega > k_B T \qquad w_{E,\omega} = \frac{4(2\pi)^4 h}{c^3} \omega^3 e^{-\hbar\omega/k_B T}$$

Wien'sches Strahlungsgesetz

$$3) \text{ Maximum von } w_{E,\omega} \qquad \lambda_{max} = 0,2014 \frac{hc}{k_B T}$$
$$T \lambda_{max} = 2,898 \times 10^{-3} m \cdot K$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz

$$4) \text{ Gesamte Leistungsdichte} \qquad \frac{c}{4\pi} \int w_{E,\omega} d\omega = \sigma T^4$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Der Name „Photon“ für die Schwingungsmoden des Feldes wurde erst später (1926) durch den Chemiker G. N. Lewis vorgeschlagen.



G. N. Lewis

Bemerkung: Die Planck'sche Theorie macht keine Aussage über das Wesen von Licht als einem „Teilchen“. Dies wurde erst 1905 von Einstein in seinem Paper zum Photoeffekt vorgeschlagen, in dem er von unteilbaren Raumpunkten mit der Energie  $\hbar\omega$  spricht.

Die Wahrscheinlichkeit  $P_n$  genau  $n$  Photonen in einem thermischen Feld zu finden ist:

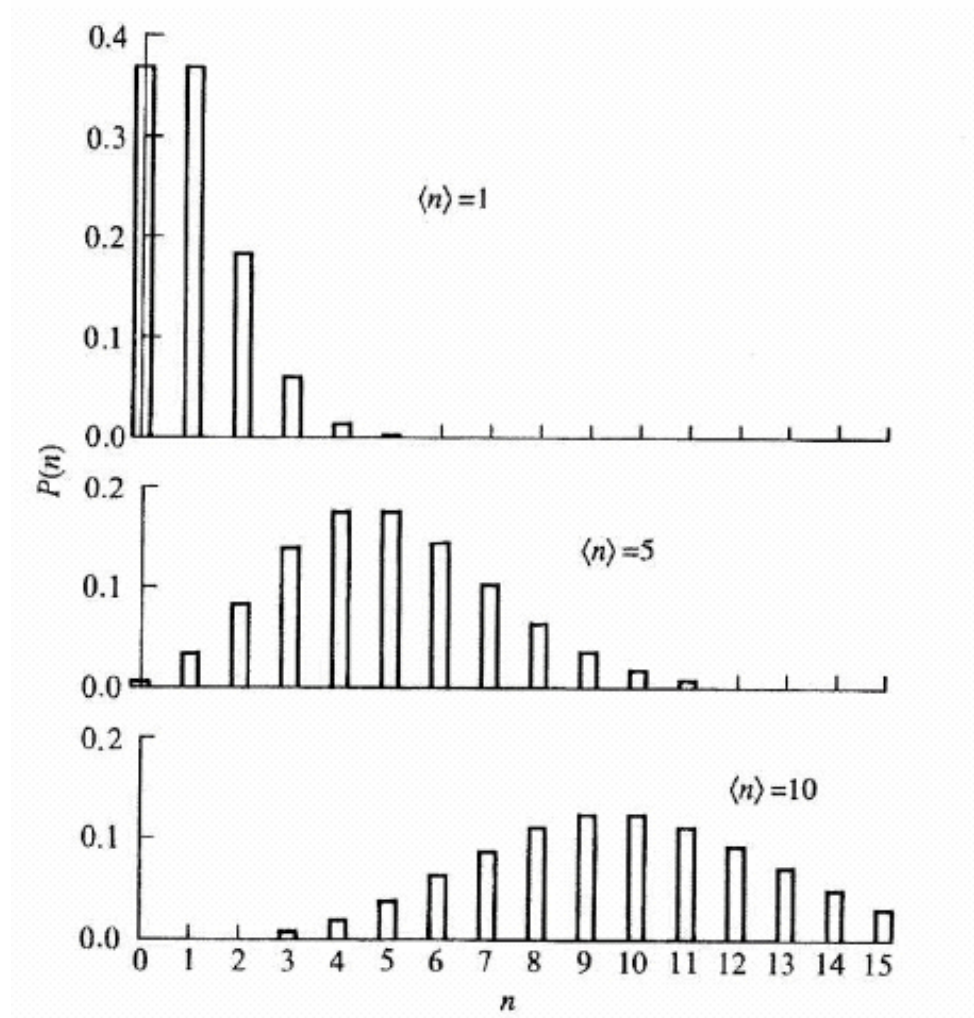
$$P_n = \frac{(\bar{n})^n}{(1+\bar{n})^{1+n}}$$

Für die statistische Grösse Varianz folgt mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung

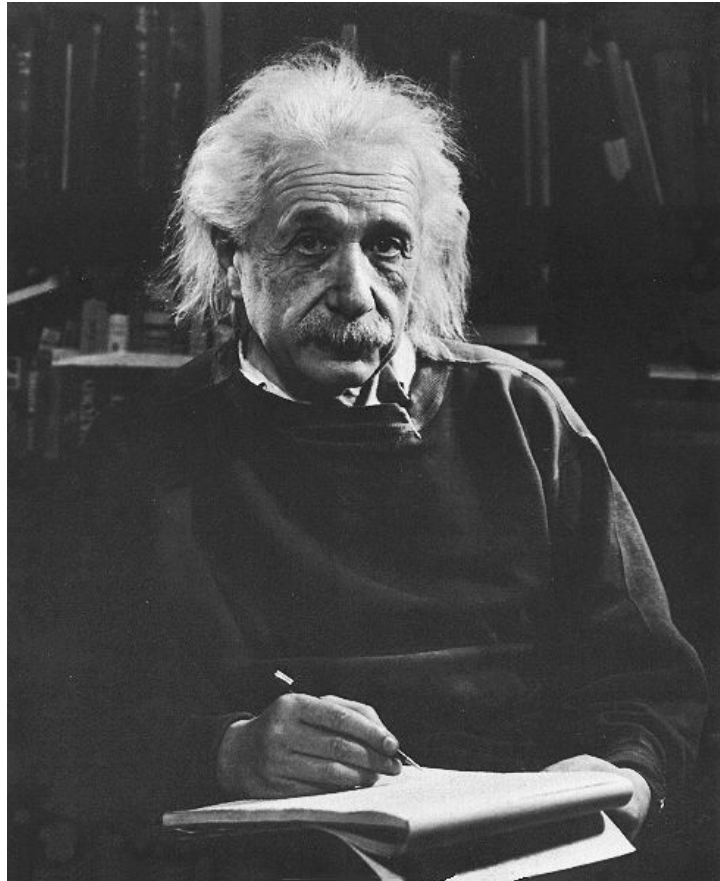
$$\Delta n = \sqrt{\bar{n}^2 - \bar{n}^2} = \bar{n}^2 + \bar{n}$$

Die Fluktuationen sind also immer grösser als der Mittelwert der Photonenzahlverteilung.

Photonenstatistik für thermisches Licht mit verschiedener mittlerer Photonenzahl.  
Man erkennt die grosse Breite des thermischen Zustandes.



## 1.1.4. Der Photoeffekt

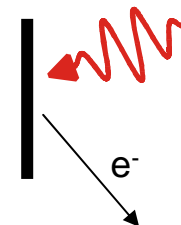


*Einstein 1905 (Annalen der Physik):  
Über einen die Erzeugung und Verwandlung  
des Lichtes betreffenden heuristischen  
Gesichtspunkt*

„Es scheint mir nun in der Tat, daß die Beobachtungen über die „schwarze Strahlung“, ..., und andere die Erzeugung bzw. Verwandlung des Lichtes betreffende Erscheinungsgruppen besser verständlich erscheinen unter der Annahme, daß die Energie des Lichtes diskontinuierlich im Raume verteilt sei. ... es besteht dieselbe aus einer endlichen Anzahl von in Raumpunkten lokalisierten Energiequanten, welche sich bewegen, ohne sich zu teilen und nur als Ganze absorbiert und erzeugt werden können.

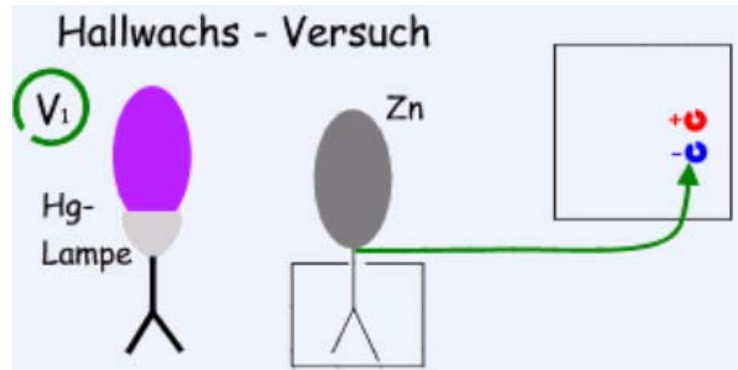
Photoelektrischer Effekt:

$$E_{\text{kin}} = h\nu - W$$

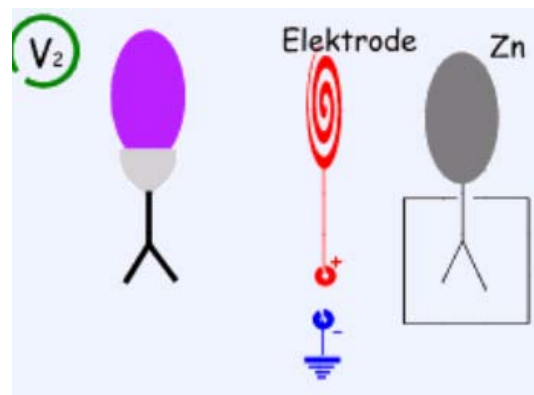


Beobachtung von Hallwachs 1888:

- a) Ein negativ aufgeladenes Elektrometer wird durch Lichteinstrahlung entladen.
- b) Ein positiv aufgeladenes Elektrometer bleibt geladen.

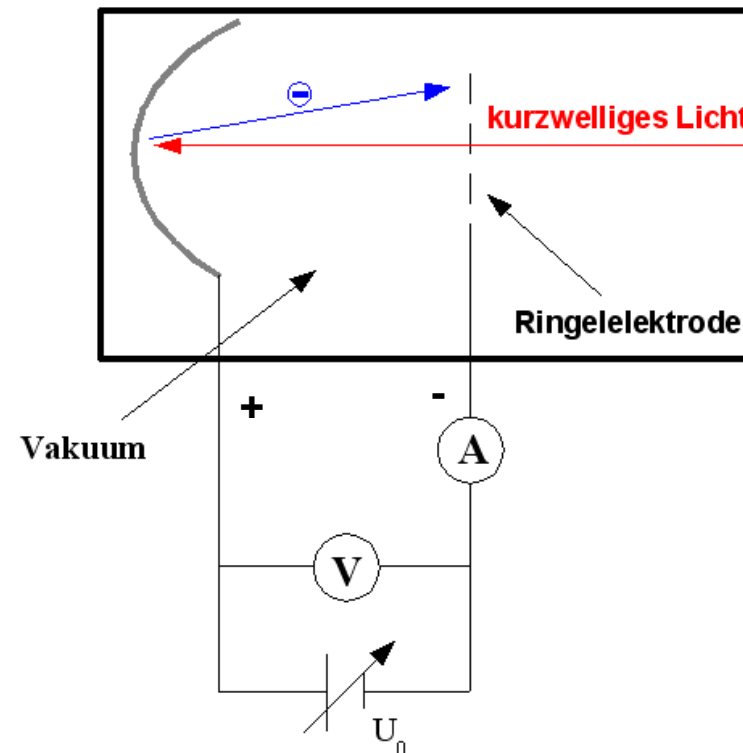


Entladung bei negativer Ladung



Negative Aufladung

Quantitativ kann der Effekt mit der Gegenfeldmethode untersucht werden:

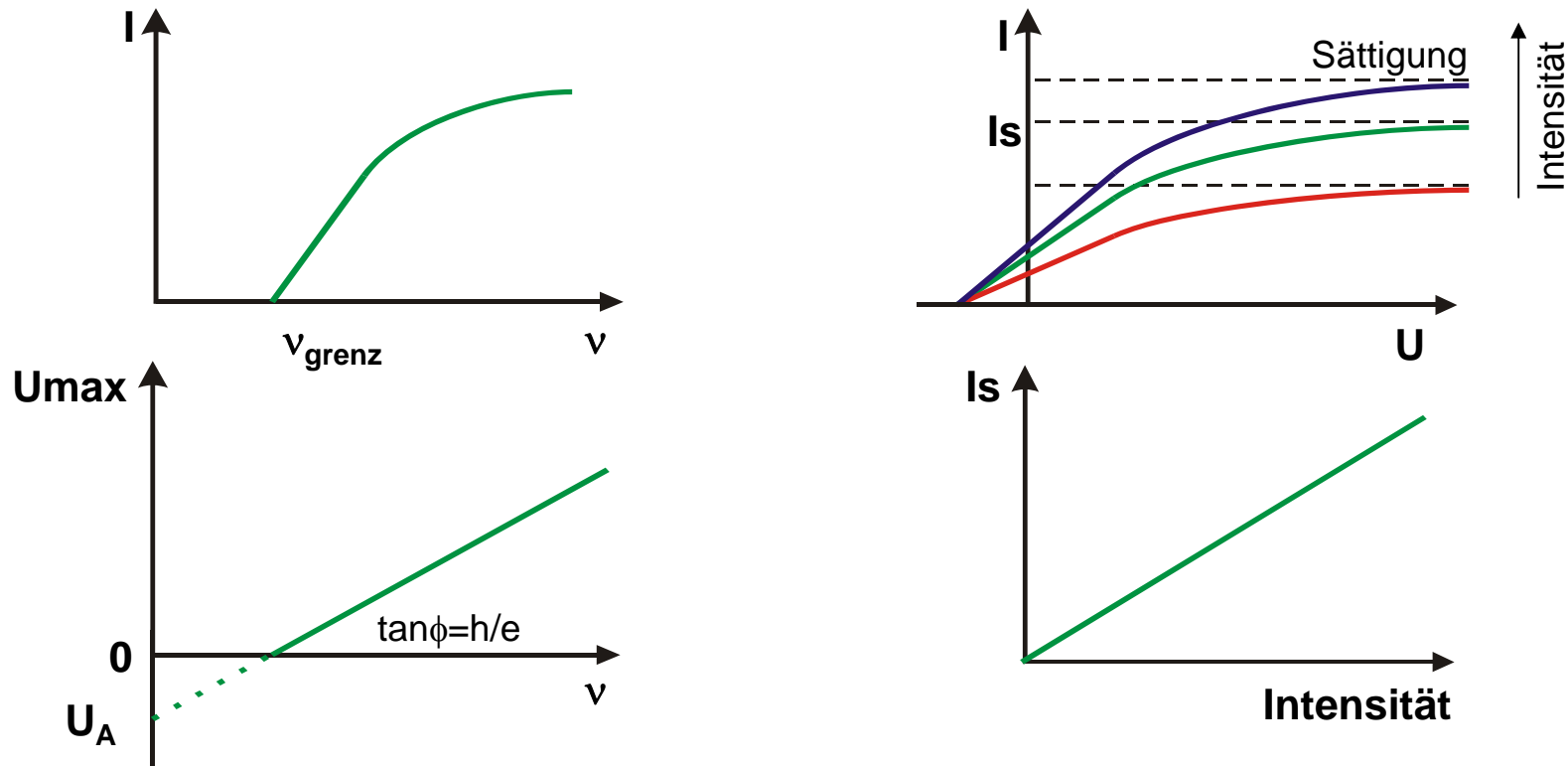




Beobachtungen:

- a) Der Strom setzt oberhalb einer charakteristischen Frequenz  $\nu_{\text{grenz}}$  ein.
- b) Wenn die Gegenspannung  $U_{\text{max}}$  einen bestimmten Wert überschreitet, fließt kein Strom mehr.
- c) Der Sättigungsstrom ist der Intensität des einfallenden Lichtes proportional.
- d) Es existiert praktisch keine Zeitverzögerung zwischen dem Lichteinfall und dem Einsetzen des Stromes.

Klassisch ist die Frequenzabhängigkeit nicht zu erklären!



Eine Erklärung fand Einstein unmittelbar aus der „Photonenhypothese“:

Energiebilanz:

$$\frac{1}{2} m_e v_e^2 = h\nu - eU_A$$

kinetische Energie der Photoelektronen

Energie des Photons

Austrittsarbeit (materialspezifisch)

Da die kinetische Energie gleich  $eU_{max}$  ist folgt:

$$eU_{max} = h\nu - eU_A$$

$$U_{max} = \frac{h\nu}{e} - U_A$$

Steigung durch Wirkungsquantum bestimmt!

Proportionalität zu  $\nu$ !

Beispiel für Austrittsarbeiten:

Metall	$U_A$ [eV]	$\lambda_{GR}$ [nm]
Li	2,46	504
Na	2,28	543
K	2,25	551
Rb	2,13	582
Cs	1,94	639
Cu	4,48	277
Pt	5,36	231

Beispiel für klassische Zeitverzögerung beim Photoeffekt:

Bei einer Bestrahlungsintensität von  $1 \text{ mW/cm}^2$ ,  $2 \text{ eV}$  Austrittsarbeit und einer Elektronendichte von  $10^{15}/\text{cm}^2$  müsste man etwa  $100 \text{ msec}$  warten bis der erste Strom fließt!  
Dies wird nicht beobachtet!

## 1.1.5. Der Comptoneffekt

Laut Einstein/Planck existieren Lichtquanten mit einer charakteristischen Energie.

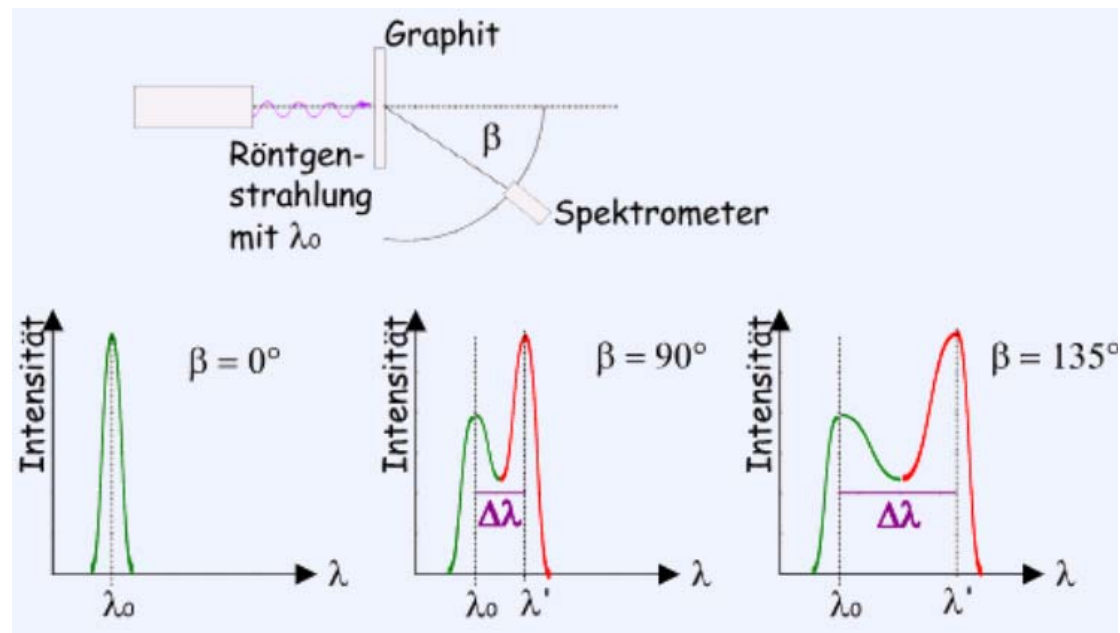
Kann man den Licht-„Teilchen“ auch einen Impuls zuordnen? Ja!

$$p = \frac{h\nu}{c} = \hbar k$$

Photonenimpuls

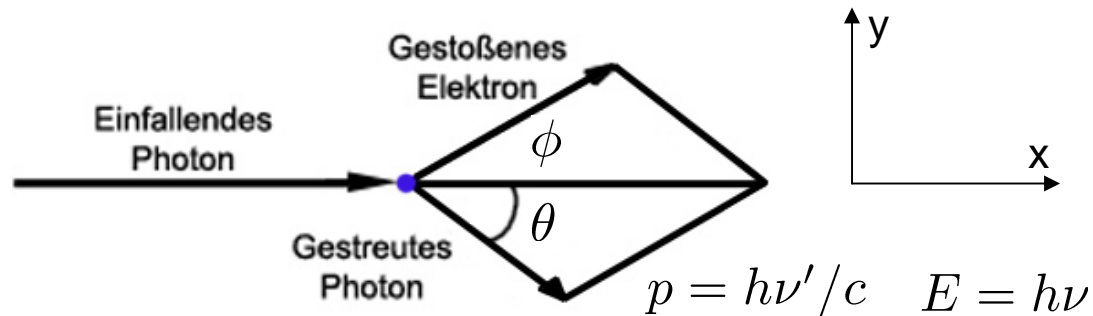
Beobachtung des Photonenimpulses bei der Comptonstreuung (Compton 1921) als Energieverschiebung des gestreuten Lichtes bei der Streuung an freien (schwach gebundenen) Elektronen.

Beobachtung von zwei Maxima bei der Streuung: resonanter Rayleigh-„peak“ und Compton-„peak“.



## Herleitung der Comptonverschiebung

Streuung von Photonen als elastischer Zweikörper-Stoß:



Energieerhaltung:

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + mc^2$$

Impulserhaltung in y-Richtung:

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \cdot \sin \theta - mv \cdot \sin \phi$$

Impulserhaltung in x-Richtung:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cdot \cos \theta - mv \cdot \cos \phi$$

mit  $\Delta\nu = \nu - \nu'$  und  $m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

folgt  $h^2(\Delta\nu)^2 + 2m_0c^2h\Delta\nu = m_0^2c^4 \frac{v^2}{c^2 - v^2}$

Aus der Impulserhaltung folgt mit  $1 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi$  :

$$h^2 [(\Delta\nu)^2 + 2\nu(\nu - \Delta\nu)(1 - \cos \theta)] = m_0^2 c^4 \frac{v^2}{c^2 - v^2}$$

somit:  $m_0 c^2 h \Delta\nu = h^2 \nu(\nu - \Delta\nu)(1 - \cos \theta)$

Nach Umrechnung in Wellenlängen:  $|\Delta\lambda| = \left| \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu - \Delta\nu} \right| = \frac{c\Delta\nu}{\nu(\nu - \Delta\nu)}$

folgt:  $|\Delta\lambda| = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \lambda_c (1 - \cos \theta)$

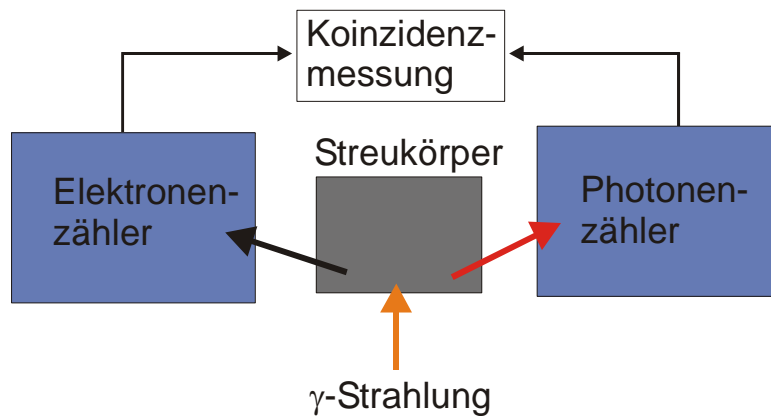
Comptonwellenlänge  $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$

Und für die Comptonenergie:  $E_{Compton} = \frac{hc}{\lambda_c} = m_0 c^2 = 511 \text{ keV}$

↑  
Ruheenergie des Elektrons

## Einige Bemerkungen zur Comptonstreuung:

- 1) Es konnte gezeigt werden, dass bei der Comptonstreuung die freigeschlagenen Elektronen und die gestreuten Photonen in Koinzidenz auftreten (Experiment von Bothe und Geiger).



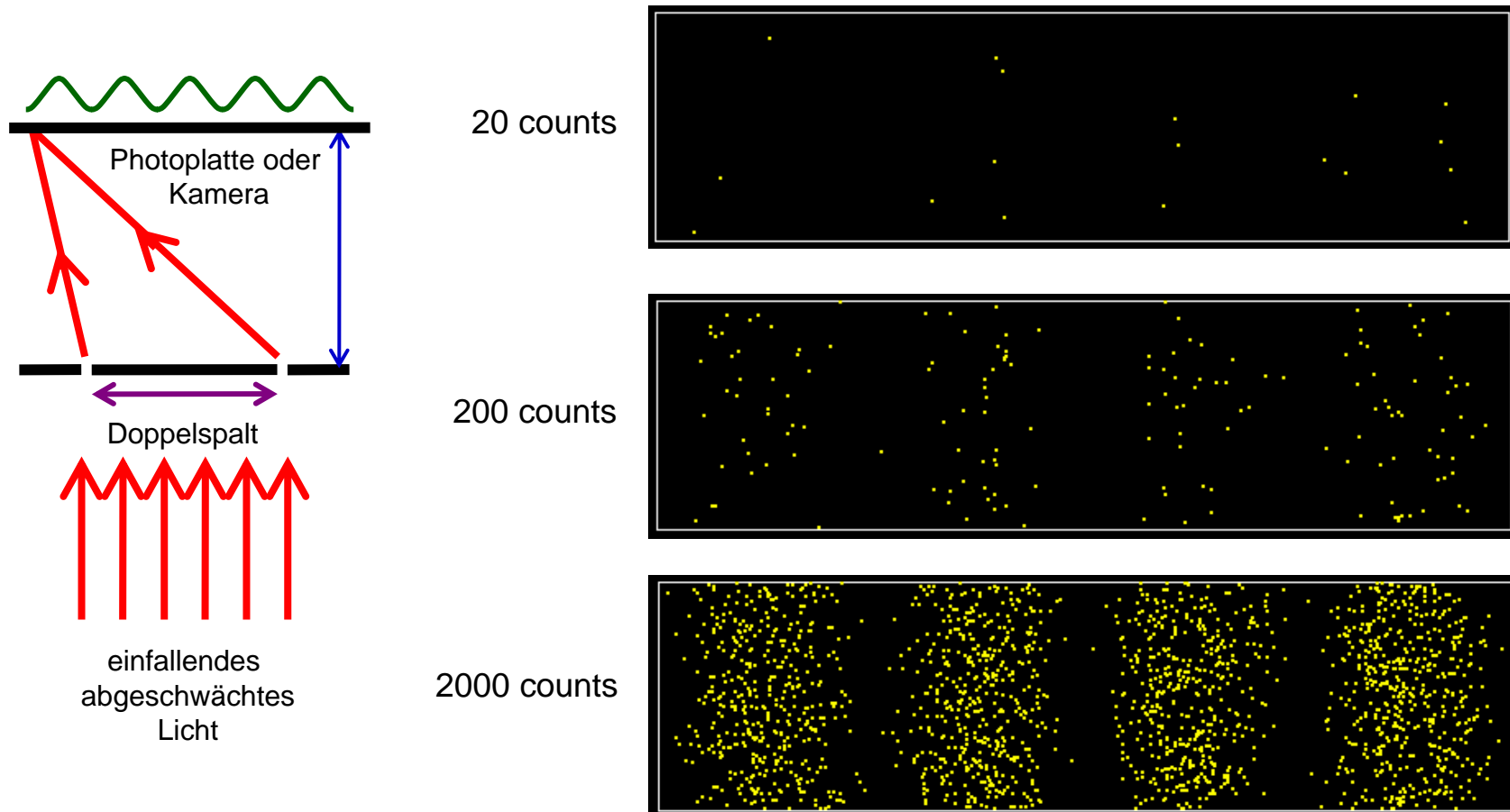
- 2) Die Comptonstreuung ist schwach bei stark gebundenen Elektronen (d.h. bei schweren Atomen).
- 3) Für mittelharte Röntgenstrahlen ist die Comptonstreuung der dominierende Effekt bei der Wechselwirkung mit Materie.
- 4) Einfallende und gestreute Strahlung bei der Comptonstreuung sind inkohärent (im Gegensatz zur kohärenten Rayleigh-Streuung).

## 1.1.6. Photonen zählen

Merkt man, dass Licht aus Photonen besteht?

Taylorexperiment von 1906: Doppelspaltexperiment mit abgeschwächtem Licht, d.h. im Mittel höchstens ein Photon ( $E=h\nu$ ) im Doppelspaltexperiment.

Resultat: Ein Interferenzexperiment (misst die Kohärenzeigenschaften von Licht!) kann nicht zwischen klassischem Licht und Quantenlicht unterscheiden!



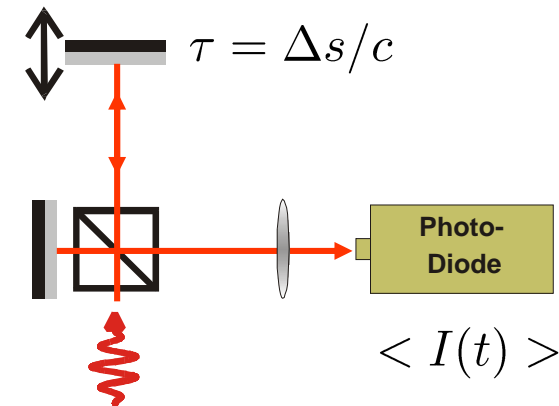
Experimentelles Resultat:

Photonen werden einzeln auf dem Kameraschirm nachgewiesen. Aus einem (scheinbar) zufälligen Muster von einzelnen Counts bilden sich Interferenzstreifen heraus. Die Wahrscheinlichkeit ein Photon zu detektieren ist in den Maxima (Minima) des Interferenzbildes maximal (minimal).

Welle-Teilchen Dualismus von Licht!

Die Interferenzfähigkeit von Licht misst die Kohärenzfunktion 1. Ordnung  $g^{(1)}$

Beispiel: zeitliche Kohärenz im Michelson-Interferometer:



$$\begin{aligned} \langle I(t) \rangle &= \langle |E(t) + E(t + \tau)|^2 \rangle \\ &= \langle I(t) \rangle + \langle I(t + \tau) \rangle + 2 * \text{Re} \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle \\ &= 2 \langle I \rangle (1 + \text{Re} \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle / \langle I \rangle) \end{aligned}$$

$$g^{(1)}(\tau) = \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle / \langle I \rangle$$

Kohärenzfunktion erster Ordnung



Die Kohärenzfunktion 2. Ordnung  $g^{(2)}$  misst die Intensitätsfluktuationen von Licht oder (im Photonenbild) die Photonenstatistik:

$$g^{(2)}(\tau) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle / \langle I \rangle^2$$

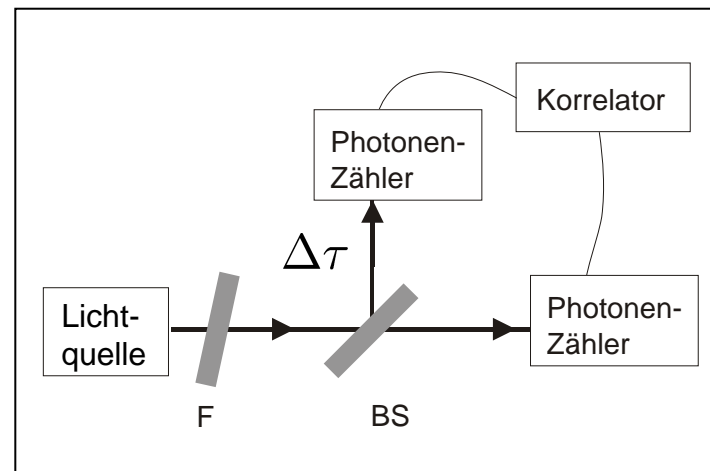
Kohärenzfunktion zweiter Ordnung

Für fluktuierende, klassische Felder kann man zeigen (z.B. Loudon, *Quantum Theory of Light*):

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$$
$$g^{(2)}(0) \geq 1$$

**Nur für klassische Felder!**

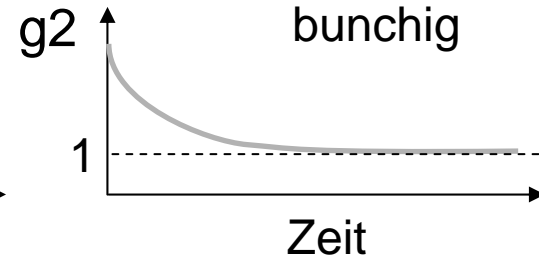
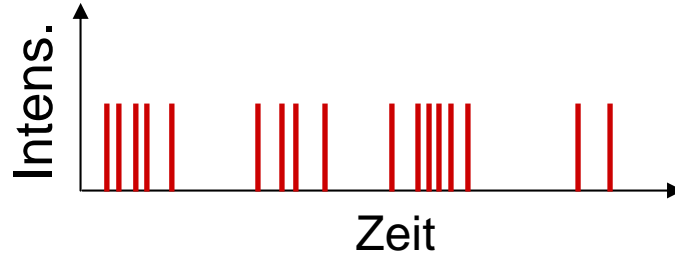
Photonenkorrelationen können in einem Hanbury Brown-Twiss Experiment gemessen werden.



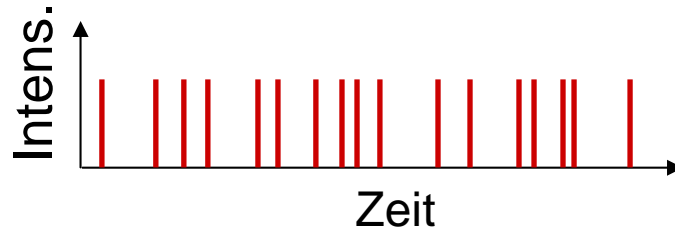
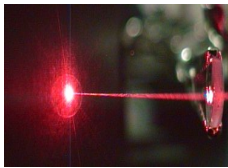
Bei der Messung der Photonenstatistik zeigen sich die Quanteneigenschaften von Licht!

Beispiel für die Photonenstatistik von drei unterschiedlichen Lichtquellen:

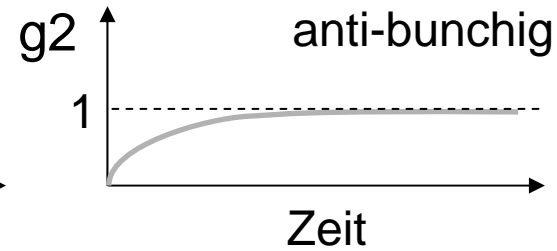
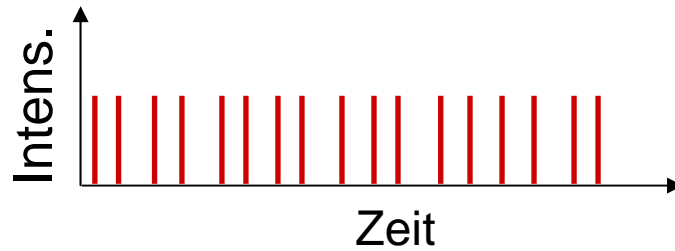
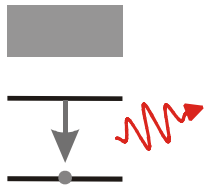
1) Thermisches Licht



2) Laser Licht



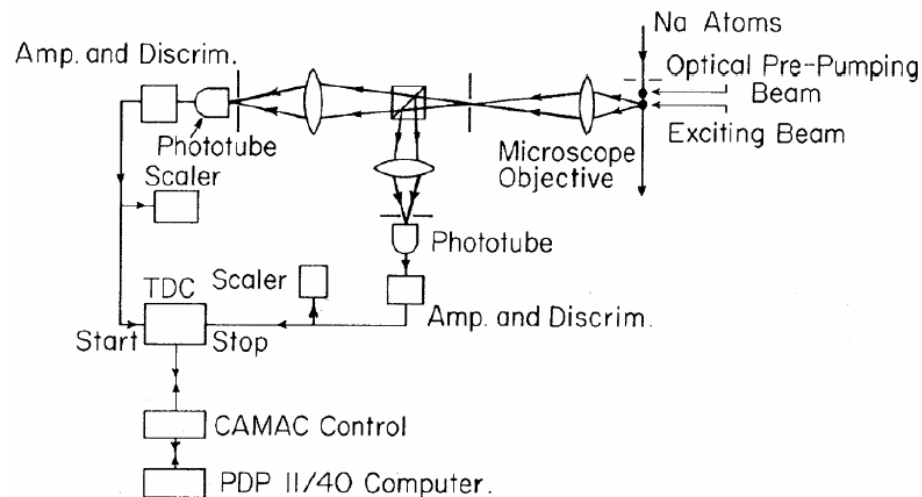
3) Nichtklassisches Licht



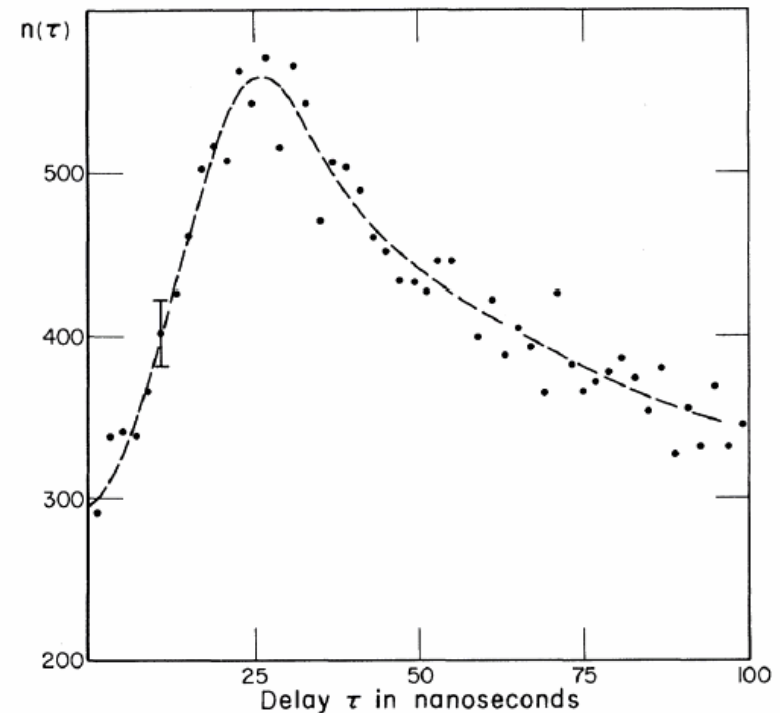
Der erste Nachweis nichtklassischer Photonenstatistik und damit einer rein quantenmechanischen Eigenschaft des Lichtes gelang erst 1977 am Caltech (Kimble):

Experiment von Kimble et al. an einem Atomstrahl von laserangeregten Na-Atomen. Die Anzahl von Koinzidenzen zwischen Clicks von Photomultipliern wurde gemessen.

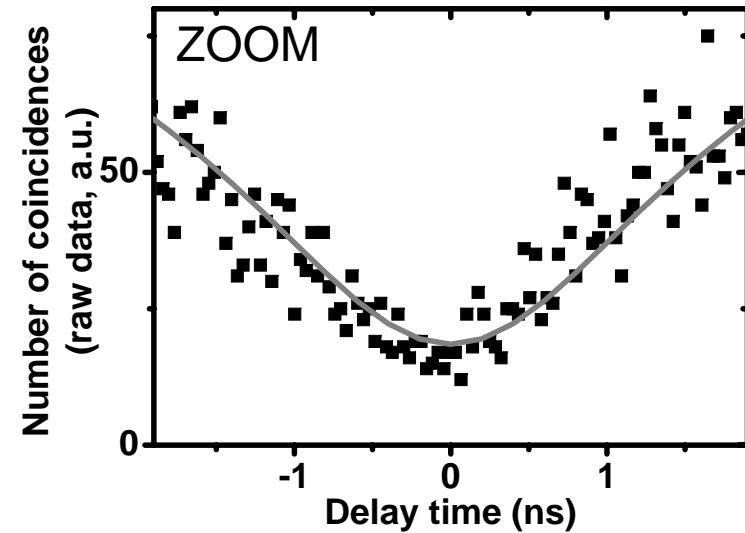
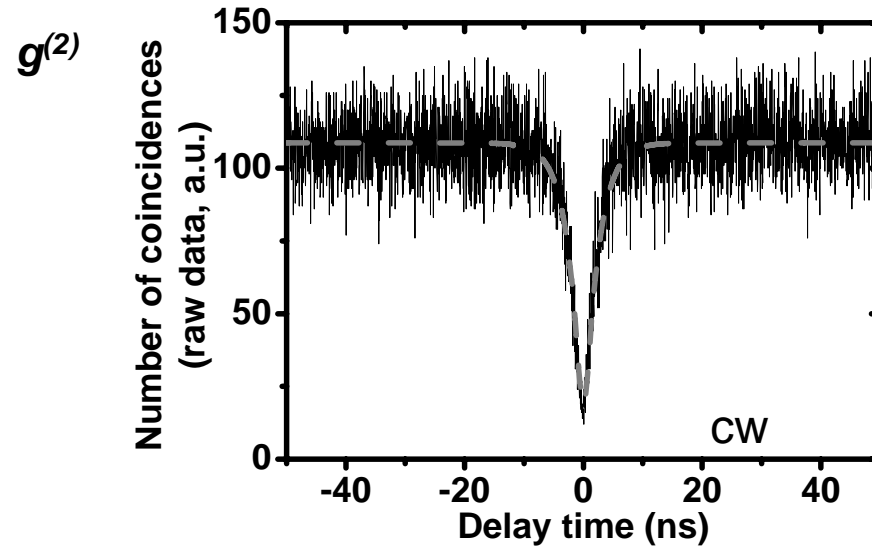
Messergebnis: Anzahl der Koinzidenzpaare in Abhängigkeit von der Zeitverzögerung  $\tau$ . Das Ansteigen der Kurve zeigt das „anti-bunching“.



[Kimble et al., Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977)]

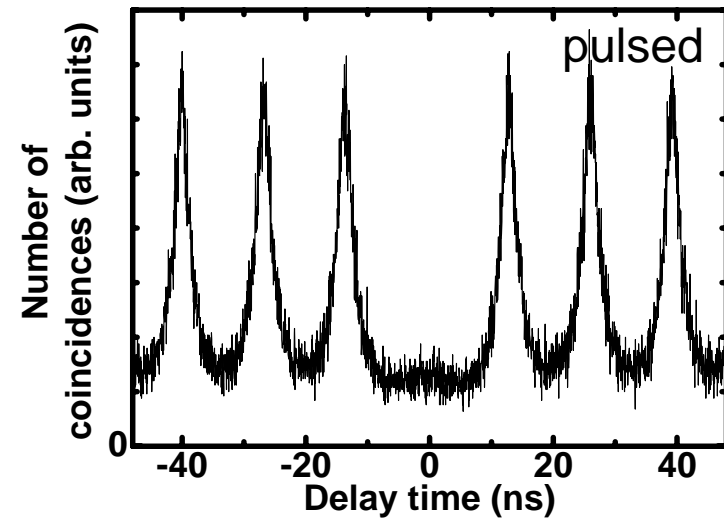


Experimentelle Resultate für die Messung der Photonenzstatistik von nicht-klassischem Licht (Einzelphotonenquelle):



Anti-bunching, d.h. wenn ein Photon bei  $t=0$  detektiert wurde, wird kein zweites unmittelbar danach detektiert.

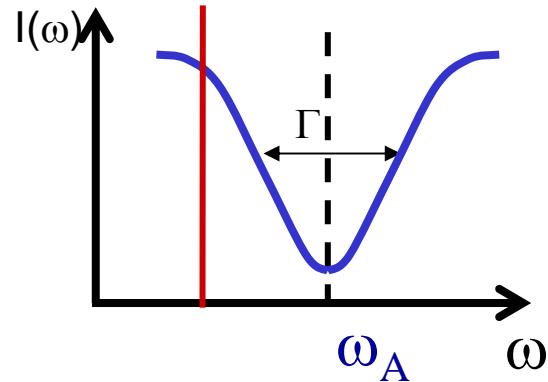
Bei einer gepulsten nicht-klassischen Lichtquelle misst man die Erzeugung einzelner Photonen



# 1.1.7. Laserkühlen

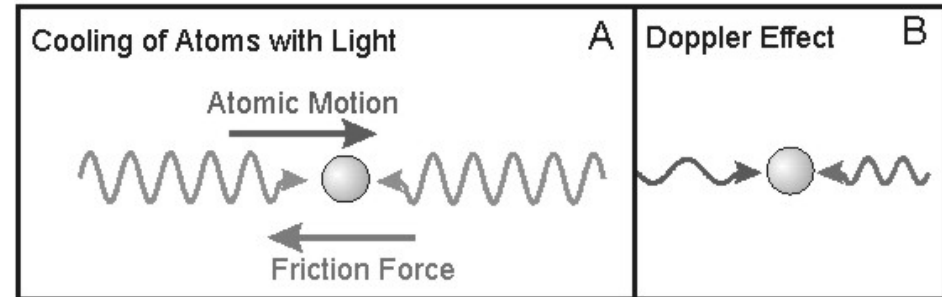
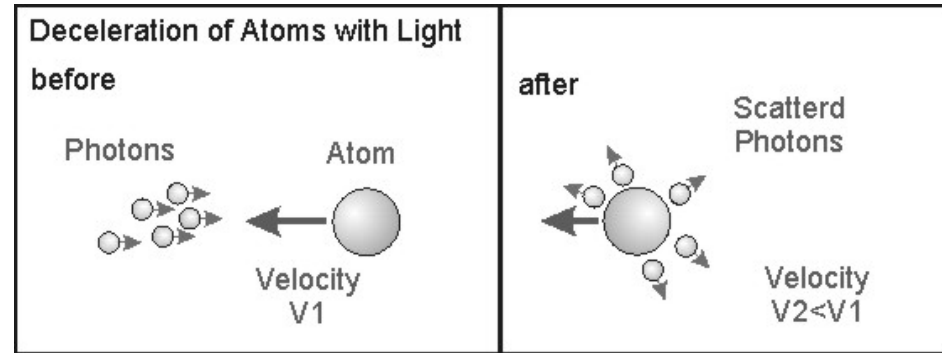
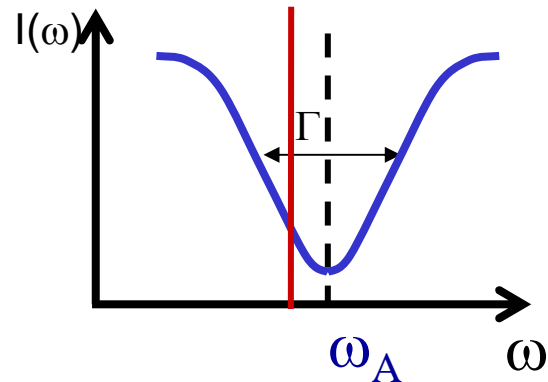
Anregung von Atomen mit rotverstimmt Licht (Anregungsfrequenz < Resonanzfrequenz)

Atom in Ruhe: keine Anregung



Atom mit Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Anregungslichtes:

Anregung möglich wegen  $\frac{\delta\nu_v}{\nu_0} = \frac{v}{c}$



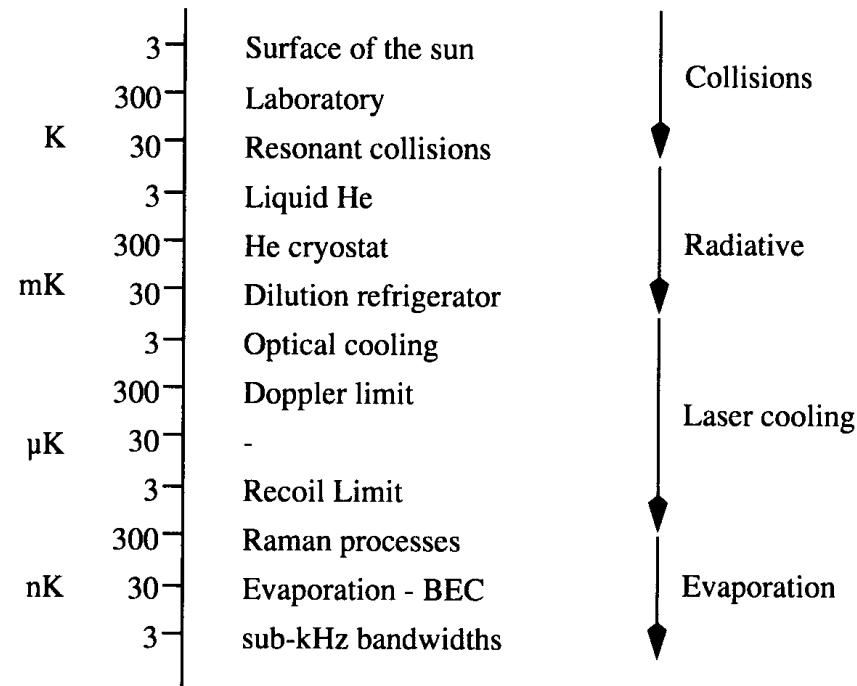
Grenze der Kühlung (Dopplerlimit):

$$k_B T_D = \frac{\hbar \Gamma}{2} \leftarrow \text{nat. Linienbreite} \quad T_D \approx 300 \mu K$$

Beschleunigung: 1000 m/s in ms = 10<sup>5</sup> g!

Mit Laserkühlmethoden lassen sich extrem niedrige Temperaturen erzeugen.

Grenzen des Laserkühlens:



Nobelpreis 1997 für laser cooling & trapping:



S. Chu, Stanford

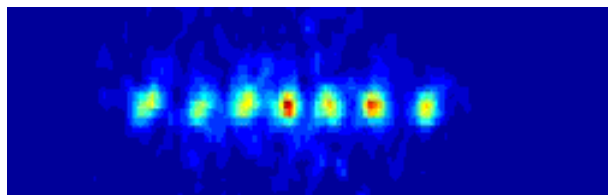


C. Cohen-Tannoudji,  
Paris



W. D. Phillips,  
Gaithersburg

Lasermanipulation von einzelnen Ionen  
(R. Blatt, Uni. Innsbruck):



## Zusammenfassung: Korpuskulare Eigenschaften des Photons

Beispiel für Natrium ( $m=3,82 \times 10^{-23}$  g) und D-Line (589,3 nm)

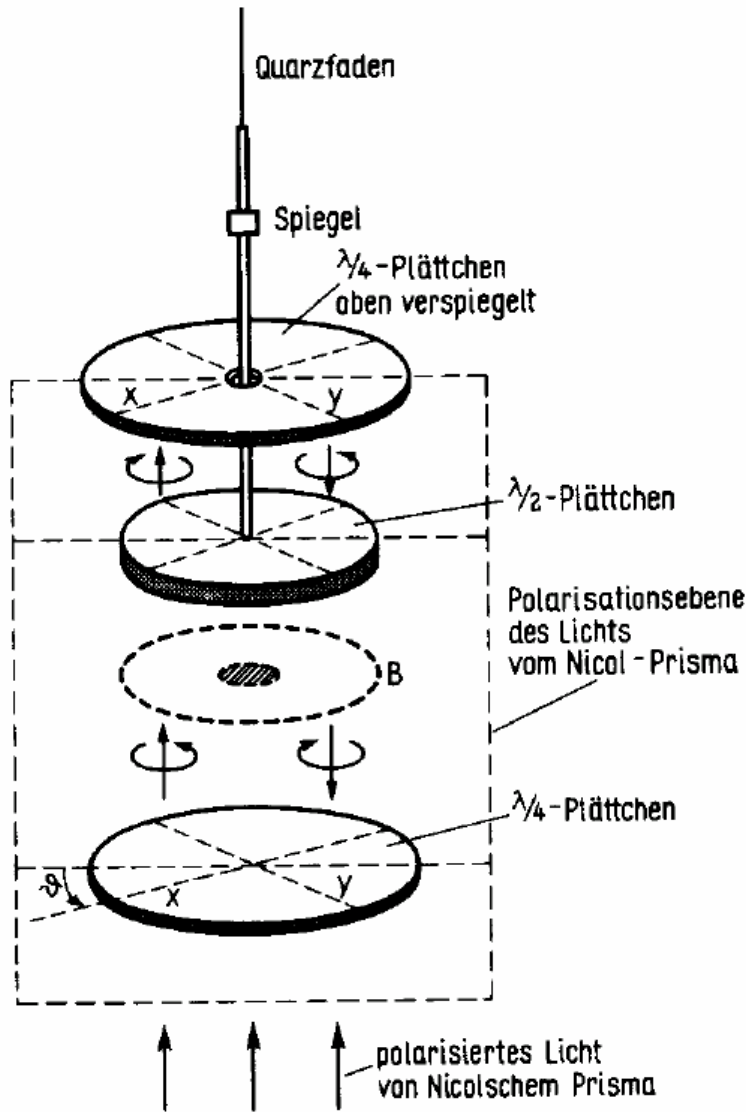
Energie	$E$	$h\nu$		$3,37 \times 10^{-19}$ Ws
Masse	$M_{\text{ph}}$	$h\nu/c^2$		$3,75 \times 10^{-33}$ g
Ruhemasse	$m_{\text{ph},0}$	0		
Impulsvektor	$\mathbf{p}_{\text{ph}}$	$\hbar \mathbf{k}$		
Impulsbetrag	$ \mathbf{p}_{\text{ph}} $	$h/\lambda$		$1,12 \times 10^{-22}$ g cm s <sup>-1</sup>
Eigendrehimpuls	$ s $	$h/2\pi$		$1,05 \times 10^{-34}$ Js

Phänomenologischer Befund:

1. Lichtquanten tragen einen Eigendrehimpuls der Grösse  $1 \hbar$ .
2. Die beobachtbaren Komponenten des Drehimpulses in Ausbreitungsrichtung sind  $\pm 1 \hbar$ .
3. Ein Quant mit  $+1 \hbar$  ( $-1 \hbar$ ) entspricht rechts- (links-) zirkular polarisiertem Licht.

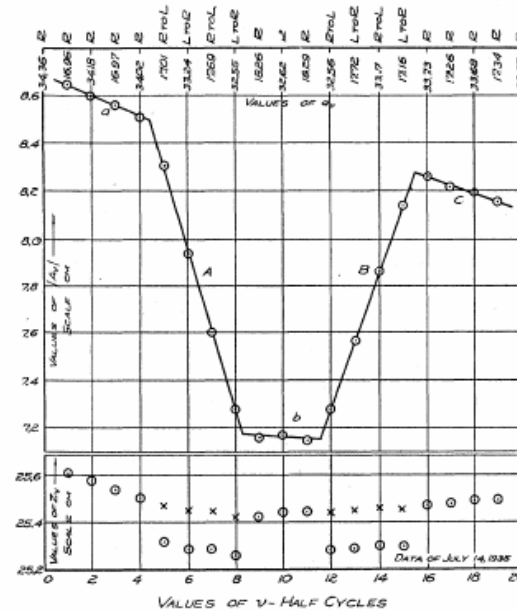
Eigenschaften von Lichtquanten

Direkter Nachweis des Drehimpulses von Photonen im Experiment von Beth (1939):



Das  $\lambda/2$ -Plättchen wandelt links- in rechts-zirkular polarisiertes Licht um, d.h. es klappt den Spin der Photonen um.

→ Ausübung eines Drehmomentes auf das Torsionspendel



Torsion in (unten) und ausserhalb (oben) der „Resonanz“ [R. A. Beth, Phys. Rev. 50, 115]